

Devoir Surveillé Blanc n°2 – Calcul intégral

BTS Économie de la Construction • Bilan du chapitre

55 min • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées**. [Correction] accède directement au corrigé.

Exercice 1 – Primitives et condition initiale (6 pts) [Correction]

a) Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive F et vérifier :

1. $f(x) = 5x^4 - \frac{3}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$

2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ sur $]2; +\infty[$ [forme u'/\sqrt{u}]

3. $f(x) = (4x + 1)e^{2x^2+x}$ sur \mathbb{R} [forme $u'e^u$]

b) Trouver l'unique primitive F de $f(x) = 6x^2 - 4x$ vérifiant $F(0) = 3$.

c) Trouver l'unique primitive G de $g(x) = e^{2x}$ vérifiant $G(0) = 1$.

Exercice 2 – Intégrales définies (6 pts) [Correction]

a) Calculer $\int_0^2 (x^3 - 2x + 3) dx$.

b) Calculer $\int_1^2 \left(\frac{3}{x} - e^x\right) dx$.

c) Calculer par IPP : $\int_0^2 xe^{-x} dx$. [$u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$]

d) Calculer $\int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1} dx$. [forme u'/u , identifier u]

e) On donne $\int_0^3 f = 6$, $\int_0^1 f = 1$, $\int_2^3 f = 2$. Calculer $\int_1^2 f$.

Exercice 3 – Problème – Toiture en arc parabolique (8 pts) [Correction]

Un architecte conçoit une toiture en arc de cercle approximée par un profil parabolique. La courbe de l'extrados (surface extérieure) est $g(x) = 6 - \frac{x^2}{6}$ et l'intrados (surface intérieure) est $f(x) = 4 - \frac{x^2}{6}$, avec x en mètres.

a) Déterminer les zéros de $g(x)$.

b) Montrer que $g(x) - f(x) = 2$ pour tout x . Comment appelle-t-on ce type de région? Quelle est son épaisseur?

c) Calculer l'aire de la section transversale de l'extrados : $\mathcal{A}_g = \int_{-6}^6 g(x) dx$.

d) Calculer $\mathcal{A}_f = \int_{-6}^6 f(x) dx$ **sans recalculer** (utiliser la linéarité et le résultat précédent).

- e) La section transversale du matériau de toiture (entre intrados et extrados) a pour aire $\mathcal{S} = \int_{-6}^6 [g(x) - f(x)] dx$. Calculer \mathcal{S} .
- f) La toiture a 12 m de longueur. Calculer le volume de matériau utilisé.
- g) Valeur moyenne de g sur $[-6; 6]$.

Barème : Ex. 1 : 6 pts Ex. 2 : 6 pts Ex. 3 : 8 pts /20

CORRIGÉ – DS BLANC N°2 – CALCUL INTÉGRAL

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 – Primitives et condition initiale (6 pts) [Énoncé]

a.1) $f(x) = 5x^4 - 3x^{-2}$.

$$F(x) = x^5 - \frac{3x^{-1}}{-1} = x^5 + \frac{3}{x}$$

Vérification : $F'(x) = 5x^4 - \frac{3}{x^2} = f(x)$ ☒

a.2) On pose $u = x^2 - 4$, $u' = 2x$. La forme est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{\sqrt{u}}$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4}$$

Vérification : $F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = f(x)$ ☒

a.3) On pose $u = 2x^2 + x$, $u' = 4x + 1$. La forme est $u'e^u$.

$$F(x) = e^{2x^2+x}$$

Vérification : $F'(x) = (4x + 1)e^{2x^2+x} = f(x)$ ☒

b) Les primitives de f sont $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + C$.

$$F(0) = 3 \Rightarrow 0 + C = 3 \Rightarrow C = 3$$

Donc $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3$.

c) Les primitives de g sont $G(x) = \frac{e^{2x}}{2} + C$.

$$G(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Donc $G(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2}$.

Correction 2 – Intégrales (6 pts) [Énoncé]

a) $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x$.

$$\int_0^2 (x^3 - 2x + 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + 3x \right]_0^2 = (4 - 4 + 6) - 0 = \boxed{6}$$

b) $F(x) = 3 \ln x - e^x$.

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x} - e^x \right) dx = [3 \ln x - e^x]_1^2 = (3 \ln 2 - e^2) - (0 - e) = 3 \ln 2 - e^2 + e$$

Valeur approchée $\approx 3 \times 0,693 - 7,389 + 2,718 \approx 2,079 - 7,389 + 2,718 \approx \boxed{-2,59}$.

c) Choix : $u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x}$; $v = x \Rightarrow v' = 1$.

$$\int_0^2 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-x}) dx = (-2e^{-2}) + [-e^{-x}]_0^2 = -2e^{-2} + (-e^{-2} + 1) = 1 - 3e^{-2} \approx 1 - 0,406 = \boxed{0,594}$$

d) On pose $u = x^3 + 2x + 1$, $u' = 3x^2 + 2$. La forme est exactement u'/u .

$$u(0) = 1, u(1) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

$$\int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1} dx = [\ln(x^3 + 2x + 1)]_0^1 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 = \boxed{2 \ln 2}.$$

$$\text{e) Par Chasles : } \int_0^3 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f + \int_2^3 f, \text{ donc } \int_1^2 f = \int_0^3 f - \int_0^1 f - \int_2^3 f = 6 - 1 - 2 = \boxed{3}.$$

Correction 3 – Toiture parabolique (8 pts) [Énoncé]

$$\text{a) } g(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - \frac{x^2}{6} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$

$$\text{b) } g(x) - f(x) = \left(6 - \frac{x^2}{6}\right) - \left(4 - \frac{x^2}{6}\right) = 2 \text{ pour tout } x.$$

La région entre les deux courbes est une **bande d'épaisseur constante** égale à 2 m. Les deux courbes sont des translates verticales l'une de l'autre.

$$\text{c) } F(x) = 6x - \frac{x^3}{18} \text{ est une primitive de } g.$$

$$\mathcal{A}_g = \left[6x - \frac{x^3}{18}\right]_{-6}^6 = \left(36 - \frac{216}{18}\right) - \left(-36 + \frac{216}{18}\right) = (36 - 12) - (-36 + 12) = 24 - (-24) = \boxed{48 \text{ m}^2}.$$

$$\text{d) Par linéarité : } f = g - 2, \text{ donc :}$$

$$\mathcal{A}_f = \int_{-6}^6 f(x) dx = \int_{-6}^6 g(x) dx - \int_{-6}^6 2 dx = \mathcal{A}_g - 2 \times 12 = 48 - 24 = \boxed{24 \text{ m}^2}.$$

$$\text{e) Par linéarité :}$$

$$\mathcal{S} = \int_{-6}^6 2 dx = 2 \times 12 = \boxed{24 \text{ m}^2}.$$

On pouvait aussi calculer $\mathcal{S} = \mathcal{A}_g - \mathcal{A}_f = 48 - 24 = 24 \text{ m}^2$.

$$\text{f) } V = \mathcal{S} \times L = 24 \times 12 = \boxed{288 \text{ m}^3}.$$

$$\text{g) } \mu_g = \frac{1}{12} \times \mathcal{A}_g = \frac{48}{12} = \boxed{4 \text{ m}}.$$

Le flux moyen de g sur $[-6; 6]$ vaut 4 m : c'est la hauteur du rectangle de base 12 m d'aire 48 m².