Devoir Surveillé Blanc n°1 — Calcul intégral

BTS Économie de la Construction • Primitives • Intégrales • Aires

55 min • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées**. Soigner la rédaction. [Correction] accède directement au corrigé.

Exercice 1 — Primitives — Vérifications (5 pts) [Correction]

Pour chacune des primitives ci-dessous, calculer $F'(x)$ et vérifier que $F' = f$.

a) $F(x) = \dfrac{x^5}{5} - 3x^2 + 7$ et $f(x) = x^4 - 6x$ sur $\mathbb{R}$.

b) $F(x) = -e^{-3x} + 2$ et $f(x) = 3e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$.

c) $F(x) = \dfrac{(x^2+1)^4}{8}$ et $f(x) = x(x^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

d) $F(x) = \ln(2x+1)$ et $f(x) = \dfrac{2}{2x+1}$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

e) $F(x) = 2\sqrt{x^2+3}$ et $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 — Calcul d'intégrales (5 pts) [Correction]

Calculer les intégrales suivantes.

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^3 (4x^3 - x + 2)\,dx$

b) $I_2 = \displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx$

c) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$ (utiliser un changement de variable ou une primitive directe)

d) $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^1 (x^3 - x)\,dx$ (que remarque-t-on sur le résultat ?)

e) On sait que $\displaystyle\int_0^4 f = 9$, $\displaystyle\int_0^4 g = 4$. Calculer $\displaystyle\int_0^4 \left[2f(x) - g(x) + 1\right] dx$.

Exercice 3 — IPP et changement de variable (5 pts) [Correction]

a) Calculer par IPP : $I = \displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$.
Préciser : $u' = \ldots$, $v = \ldots$, puis $u = \ldots$, $v' = \ldots$, et appliquer la formule.

b) Calculer $J = \displaystyle\int_2^5 e^{x-2}\,dx$ par le changement de variable $t = x - 2$.

c) Montrer que $K = \displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\ln 5}{2}$.

Exercice 4 — Problème — Flux thermique d'une façade **(5 pts)** **[Correction]**

Un ingénieur thermicien modélise le flux de chaleur traversant une façade en béton (en W/m²) sur une journée par la fonction :

$$\phi(t) = 3e^{-t} + t, \quad t \in [0; 4],$$

où t est exprimé en heures.

a) Vérifier que $F(t) = -3e^{-t} + \frac{t^2}{2}$ est une primitive de ϕ.

b) Calculer l'énergie totale échangée : $E = \int_0^4 \phi(t)\, dt$. Donner une valeur exacte puis approchée ($e^{-4} \approx 0{,}018$).

c) Calculer le flux thermique moyen $\mu_\phi = \frac{1}{4} \int_0^4 \phi(t)\, dt$.

d) Un matériau d'isolation est efficace si le flux moyen reste en dessous de 5 W/m². Ce critère est-il respecté ?

Barème : Ex. 1 : 5 pts Ex. 2 : 5 pts Ex. 3 : 5 pts Ex. 4 : 5 pts /**20**

Corrigé — DS Blanc n°1 — Calcul intégral

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Primitives (5 pts) [Énoncé]

a) $F'(x) = x^4 - 6x = f(x)$ ⊠ $((x^5/5)' = x^4, (-3x^2)' = -6x, (7)' = 0)$

b) $F'(x) = -(-3)e^{-3x} = 3e^{-3x} = f(x)$ ⊠ (règle chaîne : $u = -3x$, $u' = -3$)

c) $F'(x) = \dfrac{4 \cdot 2x \cdot (x^2+1)^3}{8} = x(x^2+1)^3 = f(x)$ ⊠

d) $F'(x) = \dfrac{2}{2x+1} = f(x)$ ⊠ (forme u'/u avec $u = 2x+1$, $u' = 2$)

e) $F'(x) = 2 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = f(x)$ ⊠ (forme $u'/\sqrt{u}$ avec $u = x^2+3$)

Correction 2 — Intégrales (5 pts) [Énoncé]

a) $F(x) = x^4 - \dfrac{x^2}{2} + 2x.$

$$I_1 = \left[x^4 - \tfrac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 = (81 - \tfrac{9}{2} + 6) - 0 = 87 - 4{,}5 = \boxed{82{,}5}.$$

b) $\sqrt{x} = x^{1/2}$ a pour primitive $\dfrac{2}{3}x^{3/2}$; $\dfrac{1}{x}$ a pour primitive $\ln x$.

$$I_2 = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \ln x\right]_1^4 = \left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \ln 4\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot 1 - 0\right) = \frac{16}{3} - \ln 4 - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} - \ln 4 \approx 4{,}667 - 1{,}386 \approx \boxed{3{,}28}.$$

c) $F(x) = \dfrac{(2x+1)^4}{8}$ (vérif. : $F'(x) = \dfrac{4 \cdot 2 \cdot (2x+1)^3}{8} = (2x+1)^3$ ⊠).

$$I_3 = \left[\frac{(2x+1)^4}{8}\right]_0^1 = \frac{3^4}{8} - \frac{1^4}{8} = \frac{81-1}{8} = \frac{80}{8} = \boxed{10}.$$

d) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}.$

$$I_4 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$x^3 - x$ est une **fonction impaire** : son intégrale sur un intervalle symétrique $[-1; 1]$ est nulle.

e) Par linéarité et convention $\displaystyle\int_0^4 1\,dx = 4$:

$$\int_0^4 [2f - g + 1]\,dx = 2\int_0^4 f - \int_0^4 g + \int_0^4 1\,dx = 2 \times 9 - 4 + 4 = 18 - 4 + 4 = \boxed{18}.$$

Correction 3 — IPP et changement de variable (5 pts) [Énoncé]

a) $I = \displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x\,dx.$

Choix : $u' = e^x \Rightarrow u = e^x$; $v = x+1 \Rightarrow v' = 1$.

$$I = \left[(x+1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (2e^1 - 1\cdot e^0) - \left[e^x\right]_0^1 = (2e-1) - (e-1) = 2e - 1 - e + 1 = \boxed{e}.$$

b) $t = x - 2 : dt = dx$, $x = 2 \Rightarrow t = 0$, $x = 5 \Rightarrow t = 3$.

$$J = \int_0^3 e^t\, dt = \left[e^t\right]_0^3 = e^3 - e^0 = \boxed{e^3 - 1} \approx 19{,}09.$$

c) $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$. La forme est $\dfrac{u'}{2u}$, donc $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{u'}{u}$.

$$K = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{\ln 5}{2}$$

Correction 4 — Flux thermique (5 pts) [Énoncé]

a) $F'(t) = -3 \cdot (-1) \cdot e^{-t} + t = 3e^{-t} + t = \phi(t)$ ⊠

b)

$$E = \left[-3e^{-t} + \frac{t^2}{2}\right]_0^4 = \left(-3e^{-4} + 8\right) - \left(-3e^0 + 0\right) = \left(-3e^{-4} + 8\right) + 3 = 11 - 3e^{-4}.$$

Valeur approchée : $E \approx 11 - 3 \times 0{,}018 = 11 - 0{,}054 \approx \boxed{10{,}95 \text{ J/m}^2}$.

c) $\mu_\phi = \dfrac{E}{4} = \dfrac{11 - 3e^{-4}}{4} \approx \dfrac{10{,}95}{4} \approx \boxed{2{,}74 \text{ W/m}^2}$.

d) $\mu_\phi \approx 2{,}74 \text{ W/m}^2 < 5 \text{ W/m}^2$: **le critère est respecté**.
L'isolation est efficace pour ce matériau dans ces conditions.