Devoir Maison n°2 — Calcul intégral

BTS Économie de la Construction • Approfondissement • Problèmes construction

À rendre dans 1 semaine • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées**. Soigner particulièrement la rédaction. La correction est disponible via [Correction].

Exercice 1 — Valeur moyenne — Étude approfondie [Correction]

a) Calculer la valeur moyenne μ_f de $f(x) = e^x$ sur $[0; \ln 2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = \mu_f$ admet une unique solution x^* sur $[0; \ln 2]$.

c) Trouver la valeur exacte de x^* et son interprétation graphique.

d) Soit $g(x) = x^2 - 3x + 4$ sur $[0; 3]$.

1. Calculer μ_g.
2. Résoudre $g(x) = \mu_g$ sur $[0; 3]$.
3. Vérifier que μ_g est bien compris entre le minimum et le maximum de g sur $[0; 3]$.

Exercice 2 — IPP double et application [Correction]

a) Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ par deux intégrations par parties successives. *Hint :* commencer par $u' = e^x$, $v = x^2$.

b) En déduire la valeur exacte de I_1.

c) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.
Montrer par IPP que $J_n = e - nJ_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
Vérification : retrouver $J_1 = 1$ et $J_2 = e - 2$ à partir de la relation.

Exercice 3 — Problème de construction — Réservoir de rétention [Correction]

Un réservoir de rétention d'eaux pluviales a une section transversale délimitée par :

— La paroi intérieure (paraboloïde) : $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$

— La hauteur maximale : $y = 12$ (en mètres)

a) Trouver les valeurs de x telles que $f(x) = 12$.

b) Calculer l'aire de la section pleine (entre $y = 0$ et $y = 12$, sans le réservoir) : $\mathscr{A}_{\text{rect}} = \text{largeur} \times \text{hauteur}$.

c) Calculer l'aire occupée par les parois et le fond du réservoir : $\mathscr{A}_{\text{paroi}} = \displaystyle\int_{-6}^{6} f(x) \, dx$.

d) En déduire l'aire de la section libre du réservoir (pour les eaux) : $\mathscr{A}_{\text{eau}} = \mathscr{A}_{\text{rect}} - \mathscr{A}_{\text{paroi}}$.

e) Le réservoir a une longueur de 20 m. Calculer le volume d'eau maximal qu'il peut contenir.

f) Un épisode pluvieux apporte 8000 m³ d'eau. Combien de réservoirs identiques faudrait-il pour absorber cet épisode ?

g) Calculer la valeur moyenne μ_f de f sur $[-6; 6]$. Interpréter physiquement en termes de hauteur de paroi.

Exercice 4 — Problème — Résistance thermique d'une paroi composite [Correction]

Une paroi composite est constituée de 3 couches superposées d'épaisseurs $e_1 = 0{,}2$ m, $e_2 = 0{,}1$ m, $e_3 = 0{,}15$ m. La conductivité thermique de chaque couche varie linéairement avec la position x (en m, depuis la face extérieure) :

$$\lambda_1(x) = 0{,}8 - x \text{ W/(m·K) sur } [0; 0{,}2],$$

$$\lambda_2(x) = 0{,}04 + 0{,}5x \text{ W/(m·K) sur } [0{,}2; 0{,}3],$$

$$\lambda_3(x) = 0{,}2 + x \text{ W/(m·K) sur } [0{,}3; 0{,}45].$$

La résistance thermique d'une couche est $R_i = \displaystyle\int_{a_i}^{b_i} \frac{dx}{\lambda_i(x)}$.

a) Calculer $R_1 = \displaystyle\int_0^{0{,}2} \frac{dx}{0{,}8 - x}$. *Indication : $u = 0{,}8 - x$, $u' = -1$.*

b) Calculer $R_2 = \displaystyle\int_{0{,}2}^{0{,}3} \frac{dx}{0{,}04 + 0{,}5x}$.

c) Calculer $R_3 = \displaystyle\int_{0{,}3}^{0{,}45} \frac{dx}{0{,}2 + x}$.

d) La résistance thermique totale est $R = R_1 + R_2 + R_3$. Calculer R en m²·K/W et donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Barème : Ex. 1 : 5 pts Ex. 2 : 5 pts Ex. 3 : 6 pts Ex. 4 : 4 pts /**20**

Corrigé — DM n°2 — Calcul intégral

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Valeur moyenne [Énoncé]

a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1.$

$\mu_f = \dfrac{1}{\ln 2 - 0} \times 1 = \dfrac{1}{\ln 2}.$

b) $f(x) = \mu_f \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) = -\ln(\ln 2).$

$\ln 2 \approx 0{,}693$, donc $x^* = -\ln(0{,}693) \approx 0{,}366 \in [0; \ln 2 \approx 0{,}693]$ ⊠. L'unicité découle de la stricte monotonie de e^x.

Interprétation : en x^*, la courbe de f coupe la droite horizontale $y = \mu_f$.

c) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - 3x + 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_0^3 = (9 - \frac{27}{2} + 12) - 0 = 21 - 13{,}5 = 7{,}5.$

$\mu_g = \dfrac{7{,}5}{3} = \boxed{2{,}5}.$

Résolution : $x^2 - 3x + 4 = 2{,}5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1{,}5 = 0.$

$\Delta = 9 - 6 = 3$, $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$. $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0{,}63$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 2{,}37.$

Les deux sont dans $[0; 3]$.

Encadrement : $g'(x) = 2x - 3$, $g' = 0$ pour $x = 1{,}5$. $g(1{,}5) = 2{,}25 - 4{,}5 + 4 = 1{,}75$ (min). $g(0) = 4$, $g(3) = 4$ (max). Donc $1{,}75 \leq \mu_g = 2{,}5 \leq 4$ ⊠.

Correction 2 — IPP double [Énoncé]

1re IPP : $u' = e^x \Rightarrow u = e^x$; $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x.$

$$I_1 = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x\,dx = e - 2\int_0^1 x e^x\,dx.$$

2e IPP pour $\int_0^1 x e^x\,dx$ **:** $u' = e^x$, $v = x$:

$$\int_0^1 x e^x\,dx = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Conclusion :

$$I_1 = e - 2 \times 1 = \boxed{e - 2}.$$

Relation $J_n = e - nJ_{n-1}$ **:** IPP avec $u' = e^x \Rightarrow u = e^x$; $v = x^n \Rightarrow v' = nx^{n-1}$:

$$J_n = \left[x^n e^x\right]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x\,dx = 1^n \cdot e - 0 - nJ_{n-1} = e - nJ_{n-1}$$

Vérification : $J_0 = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1.$

$J_1 = e - 1 \cdot J_0 = e - (e - 1) = 1$ ⊠

$J_2 = e - 2J_1 = e - 2 \times 1 = e - 2$ ⊠

Correction 3 — Réservoir [Énoncé]

a) $f(x) = 12 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3} = 12 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$

b) $\mathscr{A}_{\text{rect}} = 12 \times 12 = 144\ \text{m}^2.$

c) $F(x) = \dfrac{x^3}{9}$ est une primitive de $\dfrac{x^2}{3}$.

$$\mathscr{A}_{\text{paroi}} = \left[\frac{x^3}{9}\right]_{-6}^{6} = \frac{216}{9} - \frac{-216}{9} = 24 + 24 = 48 \text{ m}^2.$$

d) $\mathscr{A}_{\text{eau}} = 144 - 48 = \boxed{96 \text{ m}^2}$.

e) $V = 96 \times 20 = \boxed{1920 \text{ m}^3}$.

f) Nombre de réservoirs : $\dfrac{8000}{1920} \approx 4{,}17$. Il faudrait $\boxed{\text{5 réservoirs}}$ (arrondi à l'entier supérieur).

g) $\mu_f = \dfrac{\mathscr{A}_{\text{paroi}}}{12} = \dfrac{48}{12} = 4\,\text{m}$.
La hauteur de paroi moyenne sur le profil transversal est 4 m : à cette hauteur, la courbe $y = x^2/3$ est atteinte pour $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

Correction 4 — Résistance thermique [Énoncé]

a) $u = 0{,}8 - x$, $u' = -1$. Donc $\dfrac{1}{u} = -\dfrac{u'}{u}$... En fait, $\dfrac{dx}{0{,}8 - x} = -\dfrac{du}{u}$.

$$R_1 = \int_0^{0,2} \frac{dx}{0{,}8 - x} = \big[-\ln|0{,}8 - x|\big]_0^{0,2} = -\ln(0{,}6) + \ln(0{,}8) = \ln\frac{0{,}8}{0{,}6} = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}288 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}.$$

b) $u = 0{,}04 + 0{,}5x$, $u' = 0{,}5$. $u(0{,}2) = 0{,}04 + 0{,}1 = 0{,}14$, $u(0{,}3) = 0{,}04 + 0{,}15 = 0{,}19$.

$$R_2 = \int_{0,2}^{0,3} \frac{dx}{0{,}04 + 0{,}5x} = \frac{1}{0{,}5}\big[\ln(0{,}04 + 0{,}5x)\big]_{0,2}^{0,3} = 2(\ln 0{,}19 - \ln 0{,}14) = 2\ln\frac{0{,}19}{0{,}14} = 2\ln\frac{19}{14} \approx 0{,}613 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}.$$

c) $u = 0{,}2 + x$, $u' = 1$. $u(0{,}3) = 0{,}5$, $u(0{,}45) = 0{,}65$.

$$R_3 = \big[\ln(0{,}2 + x)\big]_{0,3}^{0,45} = \ln(0{,}65) - \ln(0{,}5) = \ln\frac{0{,}65}{0{,}5} = \ln 1{,}3 \approx 0{,}262 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}.$$

d)

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \approx 0{,}288 + 0{,}613 + 0{,}262 = \boxed{1{,}163 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}}.$$

Valeur exacte : $R = \ln\dfrac{4}{3} + 2\ln\dfrac{19}{14} + \ln 1{,}3$.