Devoir Maison n°1 — Calcul intégral

BTS Économie de la Construction • Primitives • Intégrales • Problèmes

À rendre dans 1 semaine • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées**. Soigner la rédaction. La correction est disponible via [Correction].

Exercice 1 — Primitives — Bilan des méthodes [Correction]

a) Pour chacune des fonctions ci-dessous, indiquer la méthode utilisée (usuelle, composée — préciser la forme), donner une primitive F et vérifier :

1. $f(x) = 7x^6$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ sur $]-1;+\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{6x^2}{x^3+2}$ sur un intervalle approprié
4. $f(x) = -6xe^{-3x^2}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = (5x+2)^8$ sur $\mathbb{R}$

b) Trouver la primitive F de $f(x) = 4x - 1$ vérifiant $F(1) = 3$.

c) On note $h(x) = xe^x$ et $H(x) = (x-1)e^x$.

1. Calculer $H'(x)$ et en déduire que H est une primitive de h.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^2 xe^x\,dx$.

Exercice 2 — Calcul d'intégrales et propriétés [Correction]

a) Calculer les intégrales suivantes en détaillant chaque étape :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^3 (2x-1)^3\,dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^e \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$ [identifier $u = x^2 + x$]
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(\cos x - \sin x\big)\,dx$

b) En utilisant uniquement la relation de Chasles et la linéarité (sans recalculer les intégrales), en déduire la valeur de :

$$\int_0^3 \left[(2x-1)^3 + \frac{2x+1}{x^2+x}\right] dx.$$

(on suppose $x^2 + x \neq 0$ sur $(0;3]$).

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$.

Exercice 3 — Problème — Profil en déblai et valeur moyenne [Correction]

Un tronçon de route en déblai a un profil transversal modélisé (en mètres) par :

— Profil du talus gauche : $f_1(x) = \dfrac{x^2}{4}$ sur $[-4;0]$
— Profil du talus droit : $f_2(x) = \dfrac{(x-2)^2}{4} + 1$ sur $[0;2]$
— Profil projet (fond de fouille) : $y = 0$

a) Vérifier que $f_1(-4) = 4$, $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 2$, $f_2(2) = 1$.
Commenter : les profils f_1 et f_2 sont-ils raccordés en $x = 0$?

b) Calculer l'aire du talus gauche : $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_{-4}^{0} f_1(x)\,dx$.

c) Calculer l'aire du talus droit : $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_{0}^{2} f_2(x)\,dx$.
Indication : effectuer le changement de variable $t = x - 2$ dans l'intégrale.

d) La section totale de déblai est $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.
Calculer $\mathscr{A}$ en m².

e) Calculer la hauteur moyenne μ de déblai sur $[-4;2]$:

$$\mu = \frac{\mathscr{A}}{6}.$$

Interpréter physiquement.

f) La route fait 200 m de longueur. Calculer le volume total de déblai.

Exercice 4 — Problème — Énergie solaire [Correction]

Le flux solaire incident sur une façade orientée plein sud est modélisé (en W/m²) par :

$$\phi(t) = 300\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right), \quad t \in [0;12],$$

où t est le temps en heures ($t = 0$ correspond au lever du soleil à 6 h).

a) Calculer $\phi(0)$, $\phi(6)$, $\phi(12)$ et interpréter physiquement.

b) Vérifier que $F(t) = -\dfrac{3600}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi t}{12}\right)$ est une primitive de ϕ.

c) Calculer l'énergie solaire totale reçue sur la journée : $E = \displaystyle\int_{0}^{12} \phi(t)\,dt$.
Donner la valeur exacte, puis la valeur approchée en J/m².

d) Calculer le flux solaire moyen $\mu_\phi = \dfrac{1}{12}E$.

e) Un vitrage absorbe 80% de l'énergie solaire reçue. Pour une façade de 15 m², calculer l'énergie absorbée par le vitrage.

Barème : Ex. 1 : 6 pts Ex. 2 : 5 pts Ex. 3 : 5 pts Ex. 4 : 4 pts /**20**

Corrigé — DM n°1 — Calcul intégral

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Primitives [Énoncé]

a.1) Forme usuelle x^n avec $n = 6$. $F(x) = x^7$. Vérif. : $F'(x) = 7x^6 = f(x)$ ⊠

a.2) $u = x + 1$, $u' = 1$. Forme $u'/\sqrt{u}$. $F(x) = 2\sqrt{x+1}$. Vérif. : $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = f(x)$ ⊠

a.3) $u = x^3 + 2$, $u' = 3x^2$. On écrit $f(x) = 2 \cdot \dfrac{3x^2}{x^3+2} = 2 \cdot \dfrac{u'}{u}$. Forme u'/u. $F(x) = 2\ln|x^3+2|$. Vérif. : $F'(x) = \dfrac{6x^2}{x^3+2} = f(x)$ ⊠

a.4) $u = -3x^2$, $u' = -6x$. Forme $u'e^u$. $F(x) = e^{-3x^2}$. Vérif. : $F'(x) = -6xe^{-3x^2} = f(x)$ ⊠

a.5) $u = 5x+2$, $u' = 5$. Forme $u' \cdot u^8$ (à la constante $1/5$ près). $f(x) = \dfrac{1}{5} \cdot 5 \cdot (5x+2)^8 = \dfrac{1}{5}u'u^8$. Donc : $F(x) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{(5x+2)^9}{9} = \dfrac{(5x+2)^9}{45}$. Vérif. : $F'(x) = \dfrac{9 \cdot 5 \cdot (5x+2)^8}{45} = (5x+2)^8 = f(x)$ ⊠

b) Primitives de $4x - 1$: $F(x) = 2x^2 - x + C$. $F(1) = 3 \Rightarrow 2 - 1 + C = 3 \Rightarrow C = 2$. Donc $\boxed{F(x) = 2x^2 - x + 2}$.

c.1) $H'(x) = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x = h(x)$ ⊠(règle du produit).

c.2) $\displaystyle\int_0^2 xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^2 = (1 \cdot e^2) - (-1 \cdot e^0) = e^2 + 1.$

Correction 2 — Intégrales et propriétés [Énoncé]

a.1) $F(x) = \dfrac{(2x-1)^4}{8}$ (vérif. : $F'(x) = \dfrac{4 \cdot 2 \cdot (2x-1)^3}{8} = (2x-1)^3$ ⊠).

$$I_1 = \left[\frac{(2x-1)^4}{8}\right]_0^3 = \frac{5^4}{8} - \frac{(-1)^4}{8} = \frac{625-1}{8} = \frac{624}{8} = \boxed{78}.$$

a.2) $u = x^2 + x$, $u' = 2x + 1$. Forme exactement u'/u.
$u(1) = 2$, $u(e) = e^2 + e$.

$$I_2 = \left[\ln(x^2+x)\right]_1^e = \ln(e^2+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{e^2+e}{2}\right) = \ln\left(\frac{e(e+1)}{2}\right).$$

a.3) $F(x) = \sin x + \cos x$.

$$I_3 = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2} = (1+0) - (0+1) = 0.$$

Résultat : l'aire positive de cos et l'aire négative de $-\sin$ se compensent exactement sur $[0; \pi/2]$.

b) Par linéarité et Chasles :

$$\int_0^3 \left[(2x-1)^3 + \frac{2x+1}{x^2+x}\right] dx = I_1 + I_2 = 78 + \ln\left(\frac{e(e+1)}{2}\right).$$

c) $u = x^2$, $u' = 2x$. Donc $f(x) = xe^{x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 2xe^{x^2} = \dfrac{1}{2}u'e^u$. Forme $u'e^u$.

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e^1 - e^0}{2} = \frac{e-1}{2}$$

Correction 3 — Profil en déblai [Énoncé]

a) $f_1(-4) = \dfrac{16}{4} = 4$ ⊠; $f_1(0) = 0$ ⊠. $f_2(0) = \dfrac{(0-2)^2}{4} + 1 = 1 + 1 = 2$; $f_2(2) = 0 + 1 = 1$ ⊠.

En $x = 0$: $f_1(0) = 0 \neq 2 = f_2(0)$. Les deux profils ne sont pas raccordés en $x = 0$: il y a une discontinuité du profil (changement de pente ou de niveau au fond).

b) $F_1(x) = \dfrac{x^3}{12}$ est une primitive de $\dfrac{x^2}{4}$ $\left(F_1'(x) = \dfrac{3x^2}{12} = \dfrac{x^2}{4}\text{ ⊠}\right)$.

$$\mathscr{A}_1 = \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-4}^{0} = 0 - \frac{(-4)^3}{12} = 0 - \frac{-64}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} \approx 5{,}33 \text{ m}^2.$$

c) Changement $t = x - 2$: $dt = dx$, $x = 0 \Rightarrow t = -2$, $x = 2 \Rightarrow t = 0$.

$$\mathscr{A}_2 = \int_0^2 \left(\frac{(x-2)^2}{4} + 1\right) dx = \int_{-2}^{0} \left(\frac{t^2}{4} + 1\right) dt = \left[\frac{t^3}{12} + t\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{-8}{12} - 2\right) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67 \text{ m}^2.$$

d) $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \dfrac{16}{3} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{24}{3} = \boxed{8 \text{ m}^2}$.

e) $\mu = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$ m.

La hauteur moyenne de déblai sur le profil transversal de 6 m de large est $\dfrac{4}{3}$ m : c'est la hauteur d'un rectangle de même base et de même aire.

f) $V = \mathscr{A} \times L = 8 \times 200 = \boxed{1600 \text{ m}^3}$.

Correction 4 — Énergie solaire [Énoncé]

a) $\phi(0) = 300 \sin 0 = 0$ W/m² (lever du soleil, angle rasant). $\phi(6) = 300 \sin \dfrac{\pi}{2} = 300$ W/m² (midi solaire, flux maximal). $\phi(12) = 300 \sin \pi = 0$ W/m² (coucher du soleil).

b) $F'(t) = -\dfrac{3600}{\pi} \cdot \left(-\dfrac{\pi}{12}\right) \sin\left(\dfrac{\pi t}{12}\right) = 300 \sin\left(\dfrac{\pi t}{12}\right) = \phi(t)$ ⊠
(règle de dérivation de $\cos(u)$ avec $u = \dfrac{\pi t}{12}$, $u' = \dfrac{\pi}{12}$)

c)

$$E = \left[-\frac{3600}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]_0^{12} = -\frac{3600}{\pi} \cos \pi + \frac{3600}{\pi} \cos 0 = \frac{3600}{\pi} + \frac{3600}{\pi} = \frac{7200}{\pi} \text{ J/m}^2.$$

Valeur approchée : $E \approx \dfrac{7200}{3{,}1416} \approx \boxed{2292 \text{ J/m}^2}$.

d) $\mu_\phi = \dfrac{E}{12} = \dfrac{7200}{12\pi} = \dfrac{600}{\pi} \approx \boxed{191 \text{ W/m}^2}$.

e) Énergie pour 15 m² et 80% d'absorption :

$$E_{\text{vitrage}} = 0{,}80 \times E \times 15 = 0{,}80 \times \frac{7200}{\pi} \times 15 = \frac{86\,400}{\pi} \approx \boxed{27\,500 \text{ J}}.$$