# Calcul intégral

BTS MEC • Primitives • Intégrale • Aires • Méthodes

## Table des matières

Dans tout le chapitre, $a$ et $b$ sont deux réels d'un intervalle $I$ bornes incluses tels que $a \leq b$.

# 1 Primitives

## 1.1 Définitions

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction $F$ définie et dérivable sur $I$ vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

**Exemple.** Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

- La fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ puisque $F'(x) = f(x)$.
- La fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ puisque $G'(x) = f(x)$.

**Exemple.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, alors la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{x^2+3} + \pi$ est une primitive de $f$.

- On calcule $F'$, la dérivée de $F$ et on vérifie que l'on obtient $f$ :
- $F'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} + 0 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} = f(x)$.

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, $k$ un réel, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés.

- Si $f$ est dérivable sur $I$, alors $f$ possède au moins une primitive sur $I$.
- Si $f$ admet une primitive $F$ sur $I$, les primitives de $f$ sont les fonctions du type $F(x) + k$.
- Si $f$ est dérivable sur $I$, il existe une unique primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0) = y_0$.

**Exemple.**

- Les fonctions $F_0(x) = \frac{1}{4}x^4$, $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$, $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2$, ..., $F_k(x) = \frac{1}{4}x^4 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont toutes des primitives de la fonction $f$.
- Cependant, il n'existe qu'une unique primitive $F$ de $f$ vérifiant $F(0) = 1$ : il s'agit de $F_1$.

### 1.2 Calculs de primitives

L'objet de ce paragraphe est de présenter quelques techniques simples permettant l'obtention de primitives de fonctions données sur un intervalle déterminé.

#### 1.2.1 Primitives des fonctions usuelles

La lecture du tableau des primitives se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ».
Les fonctions $f$ suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle $I$, $n$ est un entier relatif différent de $-1$.

**Obtention de primitives par lecture inverse du tableau des dérivées :**

| $f(x)$ | une primitive $F(x)$ | conditions |
|---|---|---|
| $0$ | | $I = \mathbb{R}$ |
| $a$ | | $I = \mathbb{R}$ |
| $x^n$ | | $I = \mathbb{R}$ si $n > 0$ $I = \mathbb{R}^*$ si $n < 0$ |
| $\dfrac{1}{x^2}$ | | $I = \mathbb{R}^*$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | | $I = \mathbb{R}_+^*$ |
| $\cos x$ | | $I = \mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | | $I = \mathbb{R}$ |
| $e^x$ | | $I = \mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | | $I = \mathbb{R}_+^*$ |

Pour obtenir toutes les primitives d'une fonction $f$ donnée, il suffit de rajouter une constante.

**Exemple.**

- Une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^8$ est $F(x) = \ldots$
- Une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^8}$ est $F(x) = \ldots$

#### 1.2.2 Opérations sur les primitives

$u$ et $v$ sont des fonctions de primitives $U$ et $V$ sur un intervalle $I$.

**Tableau des opérations sur les primitives :**

| Forme de la fonction | Une primitive | Conditions |
|---|---|---|
| $u+v$ | | |
| $k\times u$ | | |
| $u'\,u^n$ | | $n\in\mathbb{N}$ |
| $\dfrac{u'}{u^n}$ | | $n\in\mathbb{N}^*$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | | $u(x)>0$ |
| $u'\cos u$ | | |
| $u'\sin u$ | | |
| $u'e^u$ | | |
| $\dfrac{u'}{u}$ | | $u(x)>0$ |

**Exemple.** On cherche à déterminer dans chacun des cas suivants une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ :

- $f(x)=4x^2$ et $I=\mathbb{R}$ : $F(x)=\ldots$
- $f(x)=2x(x^2-1)^5$ et $I=\mathbb{R}$ : $F(x)=\ldots$
- $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x-6}}$ et $x>2$ : $F(x)=\ldots$
- $f(x)=2x+2\cos(2x)-6\sin(3x-1)$ et $I=\mathbb{R}$ : $F(x)=\ldots$
- $f(x)=-9\,e^{-3x-1}$ et $I=\mathbb{R}$ : $F(x)=\ldots$
- $f(x)=\dfrac{4x-2}{x^2-x+3}$ et $I=\mathbb{R}$ : $F(x)=\ldots$

## 2 Intégrale d'une fonction

On appelle intégrale de $f$ sur $[\,a\,;\,b\,]$ le nombre réel $F(b)-F(a)$ où $F$ est une primitive quelconque de $f$ sur $I$. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

**Exemple.** Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 x\,dx$ :

- Une primitive de $f(x)=x$ est $F(x)=\ldots$
- donc, $\displaystyle\int_2^3 x\,dx = F(3)-F(2)=\ldots$

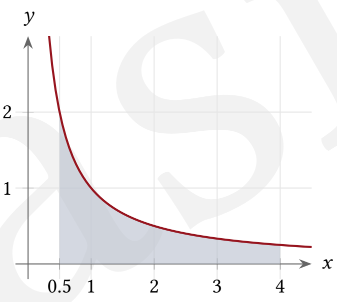
- L'intégrale d'une fonction $f$ sur $[\,a\,;\,b\,]$ est indépendante du choix de la primitive $F$.
- On note aussi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, la variable $x$ est « muette », ce qui signifie que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots$
  Le $dx$ ou $dt$ détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : $x$, ou $t$.

# 3 Interprétation graphique : calcul d'aire

## 3.1 Aire d'une fonction positive

Si $f$ est une fonction positive sur $[\,a\,;\,b\,]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

**Exemple.** Calcul de l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $\frac{1}{x}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm :




## 3.2 Aire d'une fonction négative

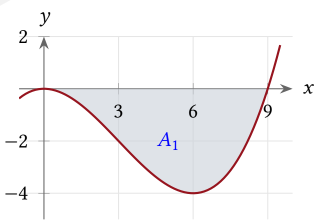
Si la fonction $f$ est négative, alors la fonction $-f$ est positive et les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Dans ce cas, $\mathscr{A} = \int_a^b [-f(x)]\,dx$.

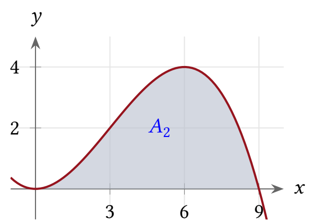
**Exemple.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}$.

$f$ est négative sur l'intervalle $[\,0\,;\,9\,]$.

Graphique de $f$ :




Graphique de $-f$ :

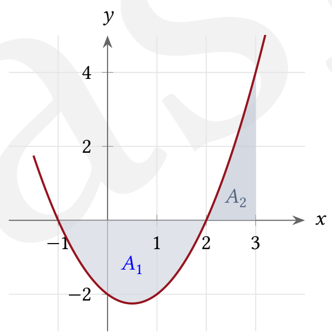



Calcul :

### 3.3 Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

**Exemple.** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 - x - 2$. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$.



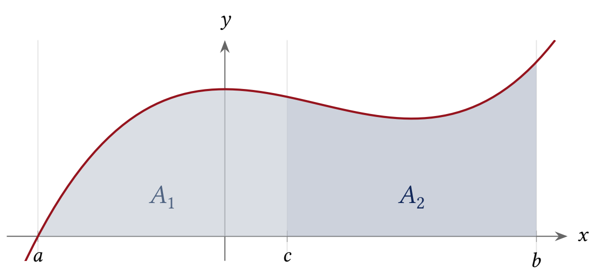

## 4 Propriétés de l'intégrale

### 4.1 Relation de Chasles

Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $c \in [\,a\,;\,b\,]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

**Interprétation graphique :**



### 4.2 Linéarité

Soient $f, g : [\,a\,;\,b\,] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $\lambda$ un réel, alors :

- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$

Ce théorème permet en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires.

**Exemple.** Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \left(6x + \frac{5}{x}\right) dx$ :

- $I = \dots$
- $I = \dots$
- $I = \dots$

### 4.3 Inégalités

Soient $f, g : [\,a\,;\,b\,] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

- Inégalité : si, pour tout $x \in [\,a\,;\,b\,]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$
- Positivité : si, pour tout $x \in [\,a\,;\,b\,]$, on a $f(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$
- Valeur absolue : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

**ATTENTION !**

La réciproque de la positivité n'est pas forcément vraie, on peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ sans avoir $f$ positive sur $[\,a\,;\,b\,]$ :

— $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\,dx = [x^2 - x]_0^3 = 6$. Donc $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\,dx \geq 0.$

— Cependant, la fonction $x \to 2x - 1$ n'est pas positive sur $[\,0\,;\,3\,]$.

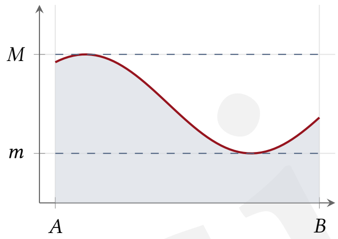
Graphiquement, toutes ces propriétés peuvent se « voir » assez facilement en considérant les aires obtenues pour chacune des intégrales.

### 4.4 Inégalité de la moyenne

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$.
S'il existe des réels $m$, $M$ et $k$ tels que pour tout $x \in [\,a\,;\,b\,]$, on ait :

- $m \leq f(x) \leq M,$ alors $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$
- $|f| \leq k,$ alors $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx \leq k(b-a).$

**Interprétation graphique :**
Dans le cas où $f$ est positive sur $[\,a\,;\,b\,]$ et où $m \geq 0$, l'aire de la partie égale à $\int_a^b f(x)\,dx$ est comprise entre l'aire du rectangle de base $AB$ de hauteur $m$ et l'aire du rectangle de base $AB$ de hauteur $M$.




Soit $f : [\,a\,;\,b\,] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si $a \neq b$, on appelle valeur moyenne de $f$ sur $[\,a\,;\,b\,]$ le nombre réel $\mu_f$ défini par

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

**Interprétation graphique :**
La droite d'équation $y = \mu_f$ est la droite horizontale telle que l'aire des parties de plan délimitées par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ d'une part et les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = \mu_f$ soient de même valeur.

**Exemple.** La valeur moyenne sur $[\,0\,;\,1\,]$ de la fonction carré est : $\mu = \dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \ldots$

### 4.5 Inégalité des accroissements finis

Les théorèmes de comparaison d'intégrales permettent d'obtenir des encadrements d'une fonction lorsqu'on sait encadrer sa dérivée.

Soit $f$ une fonction dont la dérivée $f'$ est dérivable sur un intervalle $[\,a\,,\,b\,]$.
S'il existe trois réels $m$, $M$ et $k$ tels que, pour tout $x$ de $[\,a\,,\,b\,]$, on ait :

- $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$
- $|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a).$

# 5 Méthodes de calcul d'intégrales

## 5.1 Intégration par partie

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$. La dérivée du produit $uv$ est

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{d'où} \qquad u'v = (uv)' - uv'.$$

On peut donc énoncer la propriété suivante :

> Si $a$ et $b$ sont deux éléments de $I$, on a alors
>
> $$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx,$$
>
> soit encore, si on choisit $uv$ comme primitive de $(uv)'$,
>
> $$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

**Exemple.** On désire calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$.

- On pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(x) = \ldots \\ v'(x) = \ldots \end{cases}$
- Donc : $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \ldots$

## 5.2 Changement de variables

### 5.2.1 Changement de variable du type $x \to x + \beta$

> Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle du type $[a+\beta, b+\beta]$ où $a$, $b$ et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, alors
>
> $$\int_a^b f(x+\beta)\,dx = \int_{a+\beta}^{b+\beta} f(t)\,dt.$$

**Exemple.** On se propose de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-3}^{-2} (x+3)^2\,dx$.

- Méthode directe : primitive de $(x+3)^2$ sur $[-3\,,-2\,]$ est ...donc $I = \ldots$
- Par translation : $I = \displaystyle\int_{-3}^{-2} (x+3)^2\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \ldots$

### 5.2.2 Changement de variable du type $x \to \alpha x$ lorsque $\alpha \neq 0$

Soit $f$ une fonction dérivable sur l'intervalle $[\,\alpha a\,,\,\alpha b\,]$, où $\alpha \neq 0$, alors

$$\int_a^b f(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x)\,dx.$$

**Exemple.** On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$ :

- $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^t\,dt = \ldots$

### 5.2.3 Cas général : changement de variable du type $x \to \varphi(x)$

Soit $\varphi$ une fonction dérivable sur un intervalle $I = [\,a\,,\,b\,]$ dont la dérivée est dérivable sur $I$.
Pour toute fonction $f$ définie et continue sur l'intervalle $f(I)$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

**Exemple.** Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ en posant $t = \sqrt{x}$, ce qui équivaut à $x = t^2 = \varphi(t)$ :

- Nouvelles bornes : $x \in [\,1\,,\,4\,] \Rightarrow t \in [\,\ldots\,,\,\ldots\,]$
- Expression à intégrer : $\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \ldots$
- Calcul :