Correction de la planche complète

Équations différentielles — Niveau BTS

Exercice 1 à 15 — Bloc A — Automatismes (ordre 1)

Principe général : une équation de la forme

$$y' + ay = 0$$

a pour solutions

$$y(x) = Ce^{-ax}.$$

On applique cette règle à chaque cas.

1. $y' - 2y = 0 \iff y' + (-2)y = 0$, donc
$$y = Ce^{2x}.$$
2. $y' + 3y = 0$, donc
$$y = Ce^{-3x}.$$
3. $y' - 5y = 0$, donc
$$y = Ce^{5x}.$$
4. $2y' - y = 0 \iff y' - \frac{1}{2}y = 0$, donc
$$y = Ce^{x/2}.$$
5. $y' + \frac{1}{2}y = 0$, donc
$$y = Ce^{-x/2}.$$
6. $y' - 4y = 0$, donc
$$y = Ce^{4x}.$$
7. $3y' - 6y = 0 \iff y' - 2y = 0$, donc
$$y = Ce^{2x}.$$
8. $y' + 7y = 0$, donc
$$y = Ce^{-7x}.$$
9. $y' - \frac{1}{3}y = 0$, donc
$$y = Ce^{x/3}.$$
10. $5y' - 10y = 0 \iff y' - 2y = 0$, donc
$$y = Ce^{2x}.$$
11. $y' + 2y = 0$, donc
$$y = Ce^{-2x}.$$
12. $y' - 6y = 0$, donc
$$y = Ce^{6x}.$$
13. $y' + \frac{3}{4}y = 0$, donc
$$y = Ce^{-3x/4}.$$
14. $4y' - 8y = 0 \iff y' - 2y = 0$, donc
$$y = Ce^{2x}.$$
15. $y' - y = 0$, donc
$$y = Ce^{x}.$$

Réponse finale : Pour chaque équation homogène du premier ordre, la solution est une exponentielle de la forme $Ce^{\lambda x}$.

Exercice 16 — Vérification d'une solution particulière

On considère

$$y' - 2y = xe^x$$

et

$$g(x) = (-x - 1)e^x.$$

Calculons la dérivée :

$$g'(x) = (-1)e^x + (-x - 1)e^x = (-x - 2)e^x.$$

Puis

$$g'(x) - 2g(x) = (-x - 2)e^x - 2(-x - 1)e^x.$$

En simplifiant :

$$g'(x) - 2g(x) = (-x - 2 + 2x + 2)e^x = xe^x.$$

Conclusion : g vérifie bien l'équation.

Réponse finale : $g(x) = (-x-1)e^x$ est une solution particulière de $y' - 2y = xe^x$.

Exercice 17 — Résoudre $y' - y = e^x$

Résolution : Équation homogène associée

$$y' - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = Ce^x.$$

Comme le second membre est e^x et que e^x est déjà solution de l'homogène, il y a résonance. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = Axe^x.$$

Alors

$$y_p'(x) = Ae^x + Axe^x.$$

Donc

$$y_p'(x) - y_p(x) = Ae^x.$$

On veut obtenir e^x, d'où

$$A = 1.$$

Ainsi

$$y_p(x) = xe^x.$$

La solution générale est

$$y(x) = Ce^x + xe^x.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^x + xe^x,\ C \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 18 — Résoudre $y' + 2y = e^{-2x}$

Équation homogène associée :

$$y' + 2y = 0 \Rightarrow y_0(x) = Ce^{-2x}.$$

Il y a encore résonance, car le second membre est e^{-2x}.
On cherche

$$y_p(x) = Axe^{-2x}.$$

Alors

$$y_p'(x) = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}.$$

Donc

$$y_p'(x) + 2y_p(x) = Ae^{-2x}.$$

On impose

$$Ae^{-2x} = e^{-2x},$$

donc

$$A = 1.$$

Ainsi

$$y(x) = Ce^{-2x} + xe^{-2x}.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{-2x} + xe^{-2x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 19 — Résoudre $y' - 3y = 2e^{3x}$

Équation homogène associée :

$$y' - 3y = 0 \Rightarrow y_0(x) = Ce^{3x}.$$

Le second membre est en résonance avec l'homogène.
On cherche

$$y_p(x) = Axe^{3x}.$$

Alors

$$y_p'(x) = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}.$$

Donc

$$y_p'(x) - 3y_p(x) = Ae^{3x}.$$

On veut

$$Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

donc

$$A = 2.$$

Ainsi

$$y(x) = Ce^{3x} + 2xe^{3x}.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{3x} + 2xe^{3x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 20 — Résoudre $y' + y = x$

Équation homogène associée :

$$y' + y = 0 \Rightarrow y_0(x) = Ce^{-x}.$$

On cherche une solution particulière polynomiale :

$$y_p(x) = ax + b.$$

Alors
$$y_p'(x) = a.$$
En remplaçant :
$$a + (ax + b) = x.$$
On identifie :
$$a = 1, \qquad a + b = 0.$$
Donc
$$a = 1, \qquad b = -1.$$
Ainsi
$$y_p(x) = x - 1.$$
La solution générale est
$$y(x) = Ce^{-x} + x - 1.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^{-x} + x - 1,\ C \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 21 — Résoudre $y' - y = 2x$

Équation homogène associée :
$$y' - y = 0 \Rightarrow y_0(x) = Ce^{x}.$$
On cherche
$$y_p(x) = ax + b.$$
Alors
$$y_p'(x) = a.$$
Substitution :
$$a - (ax + b) = 2x.$$
Donc
$$-ax + (a - b) = 2x.$$
On identifie :
$$-a = 2, \qquad a - b = 0.$$
Ainsi
$$a = -2, \qquad b = -2.$$
Donc
$$y_p(x) = -2x - 2.$$
La solution générale est
$$y(x) = Ce^{x} - 2x - 2.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^{x} - 2x - 2,\ C \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 22 — Résoudre $y' + 4y = e^{-4x}$

Équation homogène :
$$y' + 4y = 0 \Rightarrow y_0(x) = Ce^{-4x}.$$
Résonance, donc on cherche
$$y_p(x) = Axe^{-4x}.$$
Alors
$$y_p'(x) = Ae^{-4x} - 4Axe^{-4x}.$$
Donc
$$y_p'(x) + 4y_p(x) = Ae^{-4x}.$$
On veut e^{-4x}, donc
$$A = 1.$$
Ainsi
$$y(x) = Ce^{-4x} + xe^{-4x}.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{-4x} + xe^{-4x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 23 — Résoudre $y' - 2y = 3e^{2x}$

Équation homogène :
$$y_0(x) = Ce^{2x}.$$
Résonance :
$$y_p(x) = Axe^{2x}.$$
Alors
$$y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$
donc
$$y_p'(x) - 2y_p(x) = Ae^{2x}.$$
On impose
$$Ae^{2x} = 3e^{2x},$$
donc
$$A = 3.$$

Ainsi

$$y(x) = Ce^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{2x} + 3xe^{2x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 24 — Résoudre $y' + 5y = xe^{-5x}$

Équation homogène :

$$y_0(x) = Ce^{-5x}.$$

Comme le second membre est de la forme xe^{-5x}, avec résonance, on cherche

$$y_p(x) = e^{-5x}(ax^2 + bx).$$

Alors

$$y_p'(x) = e^{-5x}(2ax + b) - 5e^{-5x}(ax^2 + bx).$$

En ajoutant $5y_p$:

$$y_p'(x) + 5y_p(x) = e^{-5x}(2ax + b).$$

On veut

$$xe^{-5x},$$

donc

$$2ax + b = x.$$

Identification :

$$2a = 1, \qquad b = 0.$$

Donc

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = 0.$$

Ainsi

$$y(x) = Ce^{-5x} + \frac{1}{2}x^2e^{-5x}.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{-5x} + \frac{1}{2}x^2e^{-5x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 25 — Résoudre $y' - y = e^x + x$

On décompose le problème :

$$y' - y = e^x + x.$$

L'équation homogène associée donne

$$y_0(x) = Ce^x.$$

Pour le terme e^x, à cause de la résonance, on cherche

$$u_p(x) = Axe^x.$$

Comme précédemment,

$$u_p'(x) - u_p(x) = Ae^x,$$

donc

$$A = 1.$$

Pour le terme x, on cherche

$$v_p(x) = ax + b.$$

Alors

$$v_p'(x) - v_p(x) = a - (ax + b) = -ax + (a - b).$$

On veut obtenir x, donc

$$-a = 1, \qquad a - b = 0.$$

Ainsi

$$a = -1, \qquad b = -1.$$

Donc

$$v_p(x) = -x - 1.$$

Une solution particulière est

$$y_p(x) = xe^x - x - 1.$$

La solution générale est

$$y(x) = Ce^x + xe^x - x - 1.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^x + xe^x - x - 1,\ C \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 26 — Résoudre avec $f(0) = 1$ **:** $y' - y = e^x$

D'après l'exercice 17,

$$y(x) = Ce^x + xe^x.$$

On impose

$$f(0) = 1.$$

Alors

$$f(0) = Ce^0 + 0 = C.$$

Donc

$$C = 1.$$

Ainsi

$$f(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x.$$

Réponse finale : $f(x) = (1 + x)e^x$.

Exercice 27 — Résoudre avec $f(0) = 0$: $y' + 2y = e^{-2x}$

D'après l'exercice 18,

$$y(x) = Ce^{-2x} + xe^{-2x}.$$

On impose

$$f(0) = 0.$$

Donc

$$f(0) = Ce^0 + 0 = C.$$

Ainsi

$$C = 0.$$

On obtient

$$f(x) = xe^{-2x}.$$

Réponse finale : $f(x) = xe^{-2x}$.

Exercice 28 à 39 — Bloc C — Ordre 2 homogène

Principe général : on résout l'équation caractéristique associée.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$

   Équation caractéristique :

   $$r^2 - 5r + 6 = 0 = (r - 2)(r - 3).$$

   Donc

   $$y = Ae^{2x} + Be^{3x}.$$

2. $y'' - 2y' + y = 0$

   $$r^2 - 2r + 1 = 0 = (r - 1)^2.$$

   Racine double 1, donc

   $$y = (Ax + B)e^x.$$

3. $y'' + 4y = 0$

   $$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i.$$

   Donc

   $$y = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

4. $y'' - 3y' + 2y = 0$

   $$r^2 - 3r + 2 = 0 = (r - 1)(r - 2).$$

   Donc

   $$y = Ae^x + Be^{2x}.$$

5. $y'' + y = 0$

   $$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i.$$

   Donc

   $$y = A\cos x + B\sin x.$$

6. $y'' - 4y = 0$

   $$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2.$$

   Donc

   $$y = Ae^{2x} + Be^{-2x}.$$

7. $y'' + 9y = 0$

   $$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i.$$

   Donc

   $$y = A\cos(3x) + B\sin(3x).$$

8. $y'' - 6y' + 9y = 0$

   $$r^2 - 6r + 9 = 0 = (r - 3)^2.$$

   Donc

   $$y = (Ax + B)e^{3x}.$$

9. $y'' + 2y' + 5y = 0$

$$r^2 + 2r + 5 = 0.$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16.$$

Les racines sont

$$-1 \pm 2i.$$

Donc

$$y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

10. $2y'' - 5y' - 3y = 0$

$$2r^2 - 5r - 3 = 0.$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49.$$

$$r_1 = -\frac{1}{2}, \qquad r_2 = 3.$$

Donc

$$y = Ae^{-x/2} + Be^{3x}.$$

11. $y'' - y' - 2y = 0$

$$r^2 - r - 2 = 0 = (r-2)(r+1).$$

Donc

$$y = Ae^{2x} + Be^{-x}.$$

12. $y'' + 3y' + 2y = 0$

$$r^2 + 3r + 2 = 0 = (r+1)(r+2).$$

Donc

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}.$$

Réponse finale : Pour une équation d'ordre 2 homogène à coefficients constants, la forme des solutions dépend des racines de l'équation caractéristique.

Exercice 40 — Vérification de $h(x) = 4x^2e^x$

On considère

$$y'' - 2y' + y = 8e^x.$$

Posons

$$h(x) = 4x^2e^x.$$

Calculons d'abord la dérivée première :

$$h'(x) = 8xe^x + 4x^2e^x = (8x + 4x^2)e^x.$$

Puis la dérivée seconde :

$$h''(x) = (8 + 8x)e^x + (8x + 4x^2)e^x = (8 + 16x + 4x^2)e^x.$$

Calculons alors

$$h'' - 2h' + h.$$

On obtient

$$(8 + 16x + 4x^2)e^x - 2(8x + 4x^2)e^x + 4x^2e^x.$$

En simplifiant :

$$(8 + 16x + 4x^2 - 16x - 8x^2 + 4x^2)e^x = 8e^x.$$

Conclusion : h vérifie bien l'équation.

Réponse finale : $h(x) = 4x^2e^x$ est une solution particulière de $y'' - 2y' + y = 8e^x$.

Exercice 41 — Résoudre $y'' - 2y' + y = 8e^x$

Équation homogène associée :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 1 = 0 = (r-1)^2.$$

Donc

$$y_0(x) = (Ax + B)e^x.$$

D'après l'exercice 40, une solution particulière est

$$y_p(x) = 4x^2e^x.$$

La solution générale est donc

$$y(x) = (Ax + B)e^x + 4x^2e^x = (4x^2 + Ax + B)e^x.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \{x \mapsto (4x^2 + Ax + B)e^x,\ A, B \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 42 — Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^x$

Équation homogène associée :

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Équation caractéristique :
$$r^2 - 3r + 2 = 0 = (r-1)(r-2).$$
Donc
$$y_0(x) = Ae^x + Be^{2x}.$$
Le second membre est e^x, en résonance avec Ae^x.
On cherche donc
$$y_p(x) = Cxe^x.$$
Alors
$$y_p'(x) = Ce^x + Cxe^x,$$
et
$$y_p''(x) = Ce^x + Ce^x + Cxe^x = (2C + Cx)e^x.$$
Substituons :
$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (2C + Cx)e^x - 3(C + Cx)e^x + 2Cxe^x.$$
On simplifie :
$$(2C + Cx - 3C - 3Cx + 2Cx)e^x = -Ce^x.$$
On veut obtenir e^x, donc
$$-C = 1 \Rightarrow C = -1.$$
Ainsi
$$y_p(x) = -xe^x.$$
La solution générale est
$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} - xe^x.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ae^x + Be^{2x} - xe^x,\ A, B \in \mathbb{R}\right\}.$

Exercice 43 — Résoudre $y'' + y = \cos x$
Équation homogène :
$$y'' + y = 0 \Rightarrow y_0(x) = A\cos x + B\sin x.$$
Le second membre $\cos x$ est en résonance avec l'homogène.
On cherche une solution particulière sous la forme
$$y_p(x) = x(a\cos x + b\sin x).$$
On sait, ou on vérifie par calcul, qu'un choix convenable est
$$y_p(x) = \frac{x}{2}\sin x.$$
Vérification rapide :
$$y_p'(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x,$$
$$y_p''(x) = \cos x + \frac{1}{2}x(-\sin x).$$
Alors
$$y_p'' + y_p = \cos x.$$
Donc la solution générale est
$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{x}{2}\sin x.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto A\cos x + B\sin x + \frac{x}{2}\sin x,\ A, B \in \mathbb{R}\right\}.$

Exercice 44 — Résoudre $y'' - y = e^x$
Équation homogène :
$$y'' - y = 0.$$
Équation caractéristique :
$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1.$$
Donc
$$y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$
Le second membre est e^x, en résonance avec Ae^x.
On cherche
$$y_p(x) = Cxe^x.$$
Alors
$$y_p'(x) = Ce^x + Cxe^x,$$
$$y_p''(x) = 2Ce^x + Cxe^x.$$
Donc
$$y_p'' - y_p = (2Ce^x + Cxe^x) - Cxe^x = 2Ce^x.$$
On veut obtenir e^x, donc
$$2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$
Ainsi
$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^x.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^x,\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 45 — Résoudre avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$: $y'' + y = 0$

La solution générale de l'équation est

$$y(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Sa dérivée est

$$y'(x) = -A\sin x + B\cos x.$$

On impose les conditions initiales.
D'abord

$$f(0) = A = 0.$$

Ensuite

$$f'(0) = B = 1.$$

Donc

$$f(x) = \sin x.$$

Réponse finale : $f(x) = \sin x$.

Exercice 46 — Résoudre avec conditions initiales : $y'' - 2y' + y = 8e^x$

D'après l'exercice 41,

$$y(x) = (4x^2 + Ax + B)e^x.$$

Calculons la dérivée :

$$y'(x) = (8x + A)e^x + (4x^2 + Ax + B)e^x.$$

Donc

$$y'(x) = (4x^2 + 8x + Ax + A + B)e^x.$$

On impose

$$f(0) = -4.$$

Alors

$$f(0) = B = -4.$$

On impose aussi

$$f'(0) = -4.$$

Or

$$f'(0) = A + B.$$

Comme $B = -4$, on obtient

$$A - 4 = -4 \Rightarrow A = 0.$$

Ainsi

$$f(x) = (4x^2 - 4)e^x.$$

Réponse finale : $f(x) = (4x^2 - 4)e^x$.

Exercice 47 — Résoudre $y' + 3y = 6e^{-3x}$ avec $f(0) = 1$

Équation homogène :

$$y' + 3y = 0 \Rightarrow y_0(x) = Ce^{-3x}.$$

Le second membre est en résonance.
On cherche

$$y_p(x) = Axe^{-3x}.$$

Alors

$$y_p'(x) = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}.$$

Donc

$$y_p'(x) + 3y_p(x) = Ae^{-3x}.$$

On veut

$$6e^{-3x},$$

donc

$$A = 6.$$

Ainsi

$$y(x) = Ce^{-3x} + 6xe^{-3x}.$$

Condition initiale :

$$f(0) = C = 1.$$

Donc

$$f(x) = e^{-3x} + 6xe^{-3x}.$$

Réponse finale : $f(x) = e^{-3x} + 6xe^{-3x}$.

Exercice 48 — Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^x$

Cet exercice a déjà été traité à l'exercice 42.
La solution générale est

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} - xe^x.$$

Réponse finale : $\mathcal{S} = \{x \mapsto Ae^x + Be^{2x} - xe^x,\ A, B \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 49 — Résoudre $y'' + 4y = 0$ avec conditions initiales

La solution générale est

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Si les conditions initiales sont données, on calcule :

$$y'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x),$$

puis on remplace $x = 0$ pour obtenir un système sur A et B.

Conclusion : La méthode consiste à écrire la solution générale, dériver, puis utiliser les conditions initiales.

Exercice 50 — Problème complet : $y' - 2y = xe^x$, $f(0) = 0$

1. Équation homogène associée

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow y_0(x) = Ce^{2x}.$$

2. Solution particulière

On vérifie que

$$g(x) = (-x-1)e^x$$

est une solution particulière, car

$$g'(x) - 2g(x) = xe^x.$$

3. Solution générale

$$y(x) = Ce^{2x} + (-x-1)e^x.$$

4. Condition initiale

$$f(0) = C - 1 = 0 \Rightarrow C = 1.$$

Ainsi

$$f(x) = e^{2x} + (-x-1)e^x.$$

Réponse finale : $f(x) = e^{2x} + (-x-1)e^x$.